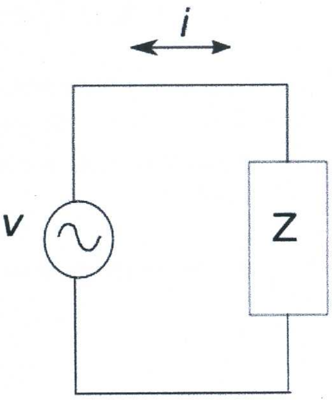

Nom : **Prénom :**

DEUXIEME PARTIE : EXERCICES

Question 1 [19 pts].

Un circuit est alimenté par un générateur de courant alternatif qui délivre un courant $i = i_0 \sin \omega t$ et une tension $v = v_0 \sin(\omega t + \phi)$ à un composant d'impédance Z.



a. [2] Donner l'expression du phaseur du courant et de la tension.

$$\hat{v} = v_0 e^{j\varphi}$$

$$\hat{i} = i_0$$

b. [3] Donner l'expression de l'impédance en fonction de i_0, v_0 et ϕ.

$$Z = \frac{v_0}{i_0} e^{j\varphi} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}}$$

c. [4] Supposons que l'impédance puisse également s'écrire sous la forme de la fonction suivante de la pulsation ω : $Z(\omega) = 10 + (2\omega - 1)\,j$, avec $j = \sqrt{-1}$. Que valent dans ces conditions v_0 / i_0 et ϕ ?

$$\frac{v_0}{i_0} = |Z| = \left(10^2 + (2\omega - 1)^2\right)^{1/2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\mathcal{Im}(Z)}{\mathcal{Re}(Z)} = \operatorname{arctg} \frac{2\omega - 1}{10}$$ et quadrant donné par $\cos\varphi = \frac{10}{|Z|}$ soit QI ou QIV

d. [4] Ce circuit est-il résonnant, c'est-à-dire existe-t-il une valeur de la pulsation ω pour laquelle l'intensité du courant i_0 est maximale (pour une valeur fixée de v_0) ?

$$i_0 = \frac{v_0}{\left(10^2 + (2\omega - 1)^2\right)^{1/2}}$$ est max. si $2\omega - 1 = 0$ càd $\omega = \frac{1}{2}$ rad/s

Oui le circuit est résonnant.

e. [2] Que vaut la pulsation ω dans le cas du courant alternatif domestique (en Europe) ?

$\nu = 50$ Hz $\rightarrow \omega P = 2\pi \rightarrow \frac{\omega}{\nu} = 2\pi \rightarrow \omega = 2\pi\nu$

$\rightarrow \omega = 2\pi \times 50 = 100\,\pi = 314.16$ rad s^{-1}

f. [4] L'expression ci-dessus pour *Z* est-elle réaliste, c'est-à-dire pouvez-vous identifier un groupement de composants qui conduirait à une expression égale ou aussi proche que possible de l'expression pour *Z* donnée ci-dessus ?

Le plus proche est RLC série : $Z(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

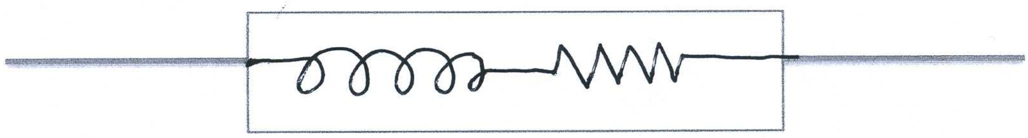
avec $R = 10\,\Omega$ $\simeq 10 + j(2\omega - 1)$

$L = 2$ H

Le problème est le terme $1 = \frac{1}{\omega C}$ car la capacité ne dépend pas de ω !

Question 2 [34 pts] :

Une bobine réelle se caractérise par une inductance de valeur *L*, combinée (en série) à une résistance de valeur *R*. Pour une bobine réelle, ces propriétés *L* et *R* sont indissociables (tout comme la résistance interne d'une pile ne peut être dissociée du générateur de tension) :



Dans une première expérience (cas DC), elle est alimentée par une source de tension continue. Longtemps après la mise en route du circuit, elle est parcourue par un courant d'intensité 200 mA, et la tension à ses bornes est de 32 V. Dans une seconde expérience (cas AC), elle est alimentée par une source de tension sinusoïdale de fréquence ν = 50 Hz. L'intensité efficace du courant qui la parcourt est de 100 mA et la tension efficace à ses bornes est de 30V.

a. [5 pts] Déduire des informations ci-dessus les valeurs de *L* et de *R*.

DC : la bobine ne joue aucun rôle $\rightarrow R = V_{DC}/I_{DC} = \frac{32}{0.2} = 160\,\Omega$

AC : $Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$ avec $R = 160\,\Omega$, $\omega = 314.16$ rad/s

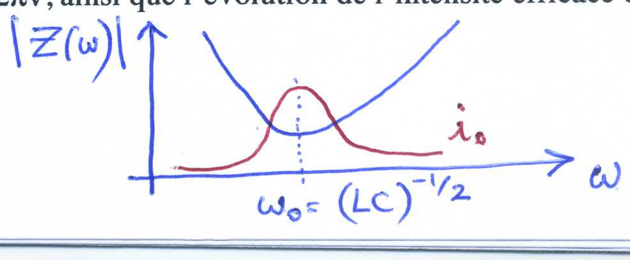
$v_{eff} = |Z|\, i_{eff} = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}\, i_{eff} \rightarrow 30 = |Z|\, 0.1 \rightarrow |Z| = 300\,\Omega$ et $L = 0.81$ H

b. [4 pts] On place un condensateur en série avec la bobine. Ecrire l'impédance et le module de l'impédance d'un tel circuit.

$Z_{RLC\ série} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ $|Z| = \left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right)^{1/2}$

$|Z(\omega)| \rightarrow \infty$ si $\omega \rightarrow \infty$
et si $\omega \rightarrow 0$

c. [4 pts] Dessiner schématiquement l'évolution du module de l'impédance en fonction de la pulsation ω = 2πν, ainsi que l'évolution de l'intensité efficace du courant en fonction de la pulsation ω.



circuit résonnant pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

d. [2 pts] Quelle doit être la capacité du condensateur placé en série avec la bobine afin d'obtenir un circuit résonnant en courant alternatif ?

$$\omega_0 = 314.16 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{10^4 \pi^2\, 0.81}$$

$$= 1.25\ 10^{-5}\ F = 12.5\ \mu F$$

e. [2 pts] La résonance étant réalisée, calculer l'intensité efficace du courant circulant dans le circuit si celui-ci est alimenté par une tension efficace sinusoïdale de 30 V.

Lors de la résonance : $\omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow |Z| = R$

$$\rightarrow i_{eff} = \frac{v_{eff}}{|Z|} = \frac{v_{eff}}{R} = \frac{v_{eff}}{160} = \frac{30}{160} = 0.187\ A$$

f. [6 pts] Calculer dans les mêmes conditions que la question e. ci-dessus la tension efficace aux bornes de la bobine et aux bornes du condensateur. Donner leur expression analytique d'abord, numérique ensuite.

Si $v_{eff} = 30\,V$, alors $v_{eff,C} = |Z_c|\, i_{eff} = \frac{1}{\omega_0 C}\, i_{eff} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_{eff}$

$$v_{eff,L} = |Z_{L\,réelle}|\, i_{eff} = \left(R^2 + \omega_0^2 L^2\right)^{1/2} i_{eff}$$

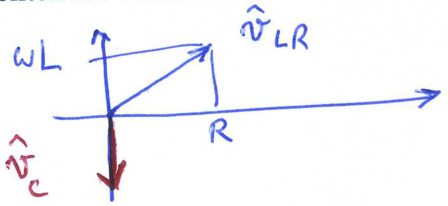
$$= \left(R^2 + \frac{L}{C}\right)^{1/2} i_{eff}$$

g. [4 pts] Si le courant dans le circuit est décrit par l'expression $i = i_0 \sin \omega t$, donner les expressions numériques des phaseurs de la tension aux bornes de la bobine et du condensateur dans le cas AC décrit ci-dessus.

bobine (réelle): $Z_{LR} = R + \omega L j$ $\quad |Z| = (R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}$ $\quad \hat{v} = i_0 |Z| e^{j\varphi}$ avec $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$

condensateur : $Z_c = -\frac{j}{\omega C} \rightarrow \hat{v} = \frac{i_0}{\omega C} e^{-\frac{\pi}{2} j}$

h. [4 pts] Représentez les vecteurs de Fresnel correspondants, pour $t = 0$.



i. [3 pts] Expliquer pourquoi la somme des deux tensions efficaces aux bornes du condensateur et de la bobine n'est pas égale à 30V, la tension efficace aux bornes du circuit.

A cause ~~des~~ du déphasage ~~s~~ existant entre ces deux tensions.