DEUXIEME PARTIE : EXERCICES

Question 1 [19 pts].

Un circuit est alimenté par un générateur de courant alternatif qui délivre un courant $i = i_0 \sin \omega t$ et une tension $v = v_0 \sin (\omega t + \phi)$ à un composant d'impédance $Z$.


$$
\hat{v} = v_0 e^{j\phi}
$$

$$
\hat{i} = i_0
$$

dans la notation exponentielle.

b. [3] Donner l'expression de l'impédance en fonction de $i_0$, $v_0$ et $\phi$.

$$
Z = \frac{v_0}{i_0} e^{j\phi} = \frac{\hat{v}}{\hat{i}}
$$

c. [4] Supposons que l'impédance puisse également s'écrire sous la forme de la fonction suivante de la pulsation $\omega$: $Z(\omega) = 10 + (2\omega - 1)j$, avec $j = \sqrt{-1}$. Que valent dans ces conditions $v_0/i_0$ et $\phi$?

$$
\frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{|Z|} = \left(10^2 + (2\omega - 1)^2\right)^{1/2}
$$

$$
\phi = \arctg \frac{\text{Im}(Z)}{\text{Re}(Z)} = \arctg \frac{2\omega - 1}{10} 	ext{ et quadrant donné jer con} \phi = \frac{10}{|Z|}
$$

soit $Q \Omega$ et $Q'N$.

d. [4] Ce circuit est-il résonnant, c'est-à-dire existe-t-il une valeur de la pulsation $\omega$ pour laquelle l'intensité du courant $i_0$ est maximale (pour une valeur fixée de $v_0$) ?

$$
i_0 = \frac{v_0}{\left(10^2 + (2\omega - 1)^2\right)^{1/2}} \text{ est max. si } Z \omega = 0 \text{ c'est-à-dire } \omega = \frac{1}{2}
$$

Oui le circuit est résonnant.
e. [2] Que vaut la pulsation $\omega$ dans le cas du courant alternatif domestique (en Europe) ?

\[ V = 50 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \frac{V}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{\omega} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi \frac{V}{\sqrt{3}} \]

\[ \omega = 2\pi \times 50 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \]

f. [4] L'expression ci-dessus pour $Z$ est-elle réaliste, c'est-à-dire pouvez-vous identifier un groupement de composants qui conduirait à une expression égale ou aussi proche que possible de l'expression pour $Z$ donnée ci-dessus ?

- Le plus proche est RLC série : $Z(w) = R + j \left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{wC}\right)$

  avec $R = 10 \Omega$

  $L = 2\text{ H}$

  le problème est le terme $1 = \frac{1}{wC}$ car la capacité ne dépend pas de $w$ !

Question 2 [34 pts] :

Une bobine réelle se caractérise par une inductance de valeur $L$, combinée (en série) à une résistance de valeur $R$. Pour une bobine réelle, ces propriétés $L$ et $R$ sont indissociables (toujours comme la résistance interne d'une pile ne peut être dissociée du générateur de tension) :

Dans une première expérience (cas DC), elle est alimentée par une source de tension continue. Longtemps après la mise en route du circuit, elle est parcourue par un courant d'intensité 200 mA, et la tension à ses bornes est de 32 V. Dans une seconde expérience (cas AC), elle est alimentée par une source de tension sinusoidale de fréquence $v = 50 \text{ Hz}$. L'intensité efficace du courant qui la parcourt est de 100 mA et la tension efficace à ses bornes est de 30 V.


DC : la bobine ne joue aucun rôle $\Rightarrow R = \frac{\text{VDC}}{I_{\text{DC}}} = \frac{32}{0.2} = 160 \Omega$

AC : $Z = Z_R + Z_L = R + j\omega L$ avec $R = 160 \Omega$, $\omega = 314.16 \text{ rad/s}$

$\frac{30}{121.2} \Rightarrow \frac{30}{121.2} = \left(\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{wC}\right)^{1/2} \Rightarrow 30 = 121.2 \Rightarrow 300 \Omega \Rightarrow L = 0.81$ H


$Z_{\text{RLC série}} = R + j \left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{wC}\right)$

$|Z| = \left(\frac{R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{1}{wC^2}}{wC}\right)^{1/2}$

$|Z(w)| \rightarrow \infty$ si $w \rightarrow \infty$

et si $w \rightarrow 0$

c. [4 pts] Dessiner schématiquement l'évolution du module de l'impédance en fonction de la pulsation $\omega = 2\pi v$, ainsi que l'évolution de l'intensité efficace du courant en fonction de la pulsation $\omega$.

\[ |Z(w)| \uparrow \]

$\omega_o = (LC)^{-1/2} \rightarrow \omega$

Circuit résistif

Pour $\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
d. [2 pts] Quelle doit être la capacité du condensateur placé en série avec la bobine afin d’obtenir un circuit résonnant en courant alternatif ?

\[ \omega_0 = 314.16 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = \frac{1}{10^4 \pi^2 \cdot 0.81} = 1.25 \times 10^{-5} \text{ F} = 12.5 \mu\text{F} \]

e. [2 pts] La résonance étant réalisée, calculer l’intensité efficace du courant circulant dans le circuit si celui-ci est alimenté par une tension efficace sinusoidale de 30 V.

\[
\begin{align*}
\text{Lors de la résonance : } & \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow |Z| = R \\
\rightarrow & \quad i_{\text{eff}} = \frac{|V_{\text{eff}}|}{|R|} = \frac{V_{\text{eff}}}{R} = \frac{30}{160} = 0.187 \text{ A}
\end{align*}
\]

f. [6 pts] Calculer dans les mêmes conditions que la question e. ci-dessus la tension efficace aux bornes de la bobine et aux bornes du condensateur. Donner leur expression analytique d’abord, numérique ensuite.

Si \( V_{\text{eff}} = 30 \text{ V} \), alors \( V_{\text{eff},c} = |Z_c| i_{\text{eff}} = \frac{1}{\omega C} i_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{L}{C}} i_{\text{eff}} \)

\[ W_{\text{eff},L} = |Z_{\text{eff}}| i_{\text{eff}} = \left( \frac{R^2 + \omega_0^2 L^2}{R} \right)^{1/2} i_{\text{eff}} \]

g. [4 pts] Si le courant dans le circuit est décrit par l’expression \( i = i_0 \sin \omega t \), donner les expressions numériques des phaseurs de la tension aux bornes de la bobine et du condensateur dans le cas AC décrit ci-dessus.

bobine : \( Z_{LR} = R + j\omega L \)

condensateur : \( Z_c = -\frac{j}{\omega C} \)

\[ \hat{V} = i_0 |Z| e^{j\frac{\pi}{2}} \text{ avec } \varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} \]

h. [4 pts] Représentez les vecteurs de Fresnel correspondants, pour \( t = 0 \).

i. [3 pts] Expliquer pourquoi la somme des deux tensions efficaces aux bornes du condensateur et de la bobine n’est pas égale à 30 V, la tension efficace aux bornes du circuit.

A cause des déphasages existant entre ces deux tensions.