

## PHYS-F-438 – Sessions d'exercices 1 & 2

### Exercice 1 – Potentiel gravitationnel d'un système binaire

Soit un système d'étoiles binaires en rotation autour de leur centre de gravité commun noté G. On suppose que les deux étoiles sont assimilables à des points matériels, occupent une orbite circulaire et sont en rotation synchrone avec le mouvement orbital.

On considère un référentiel tournant dans lequel les étoiles sont au repos. Dans ce référentiel, démontrer que le potentiel gravitationnel d'un point matériel M de masse  $m$  au repos dans le référentiel tournant s'écrit (sous forme réduite) :

$$\Phi(M) = -\frac{\mu}{r_1} - \frac{1-\mu}{r_2} - \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (1)$$

où  $\mu = m_1/(m_1 + m_2)$  est la masse de l'étoile 1 en unité de masse du système, les distances sont exprimées en unités de séparation orbitale et les durées en unités de période orbitale.

On donne la 3<sup>e</sup> loi de Kepler généralisée :

$$a^3 = G(m_1 + m_2) \left[ \frac{P}{2\pi} \right]^2 \quad (2)$$

où  $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse,  $m_1 + m_2$  est la masse totale du système,  $P$  est la période orbitale, et  $G$  est la constante de gravitation universelle.

### Exercice 2 – Séparation angulaire d'une composante d'un système binaire

Montrer que la séparation angulaire sur le ciel de l'orbite de la composante 1 autour du centre de masse d'un système binaire (la séparation orbitale de la composante 1) peut s'écrire :

$$a_1'' = \left[ \frac{m_1}{M_\odot} \right]^{1/3} \left[ \frac{P}{P_{\odot\oplus}} \right]^{2/3} \frac{q}{(1+q)^{2/3}} \frac{1}{d(\text{pc})} \quad [\text{arcsec}] \quad (3)$$

où  $q = m_2/m_1$  est le rapport des masses des composantes,  $d$  est la distance qui nous sépare de ce système,  $M_\odot$  est la masse du Soleil et  $P_{\odot\oplus}$  est la période de révolution de la Terre ( $\oplus$ ) autour du Soleil ( $\odot$ ).

### Exercice 3 – Vitesse radiale d'une composante d'un système binaire

Démontrer la formule de la vitesse radiale pour les binaires spectroscopiques :

$$v_{\text{rad}}^{1,2}(t) = v_G(t) + K_{1,2} [e \cos \omega_{1,2} + \cos(\omega_{1,2} + \varphi(t))] \quad (4)$$

où  $v_G(t)$  est la vitesse du centre de masse du système par rapport au référentiel héliocentrique,  $e$  est l'excentricité de l'orbite,  $\omega_{1,2}$  est l'argument des périastres,  $\varphi(t)$  est l'anomalie vraie et  $K_{1,2}$  représente l'amplitude maximale des composantes telle que :

$$K_{1,2} = \frac{2\pi}{P} \frac{a_{1,2}}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \quad [\text{m s}^{-1}] \quad (5)$$

où  $P$  est la période orbitale,  $i$  représente l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport au plan du ciel,  $a_{1,2}$  est le demi-grand axe des composantes. On utilisera l'équation paramétrique de l'ellipse :

$$r_{1,2}(t) = \frac{p_{1,2}}{1 + e \cos \varphi(t)} \quad \text{avec} \quad p_{1,2} = a_{1,2}(1 - e^2)$$

### Exercice 4 – Fonction de masse d'un système binaire

1 – Dans un système binaire, exprimer la relation qui lie le demi-grand axe  $a_1$  de la composante 1 au demi-grand-axe  $a$  du système binaire.

2 – En utilisant la 3<sup>e</sup> loi de Kepler généralisée, montrer que la fonction de masse :

$$f(m_1, m_2) \equiv \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \sin^3 i \quad (6)$$

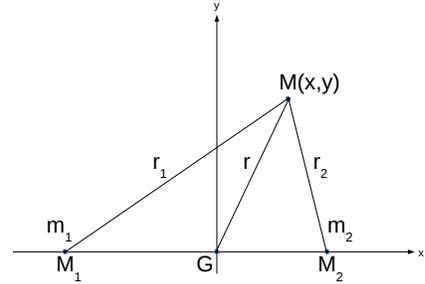


Figure 1 – Géométrie du problème.

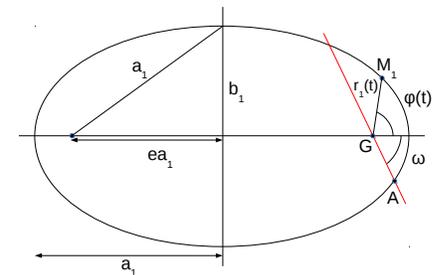


Figure 2 – Plan de l'ellipse.

peut s'écrire :

$$f(m_1, m_2) = \frac{1}{G} \frac{P}{2\pi} K_1^3 (1 - e^2)^{3/2} \tag{7}$$

où  $K_1$  est donné par l'expression (5) de l'exercice 3.

**Exercice 5 – Bételgeuse par interférométrie**

Bételgeuse est une supergéante rouge ( $R_* = 600 R_\odot$ ) de la constellation d'Orion ( $\alpha$  Ori) située à  $d_* = 131$  pc. On souhaite observer Bételgeuse avec l'interféromètre du VLT.

1 – Pour juste résoudre le rayon de Bételgeuse, quelle est la longueur de la base à utiliser, sachant que AMBER observe à  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$  ?

2 – Peut-on observer Bételgeuse avec le VLTI sachant que les lignes de bases du VLTI ont des longueurs  $B$  telles que :  $8 \text{ m} < B < 180 \text{ m}$  ?

**Exercice 6 – Mesure de rayon stellaire par interférométrie**

On souhaite mesurer le rayon d'une étoile de 2 masses solaires se situant à 1 pc par interférométrie. Il s'agit d'une étoile de la séquence principale pour laquelle on utilise l'interféromètre du VLT dans la bande  $K = 2.2 \mu\text{m}$ .

1 – Retrouver le critère de Rayleigh à partir de l'expression de  $x = \pi\theta D/\lambda$  (voir la figure 3).

2 – Quelle est la longueur de la ligne de base à utiliser pour mesurer la taille angulaire de cette étoile ? On exploitera la relation empirique masse–rayon donnée par l'expression (9), ainsi que la figure 5 et la table 2.

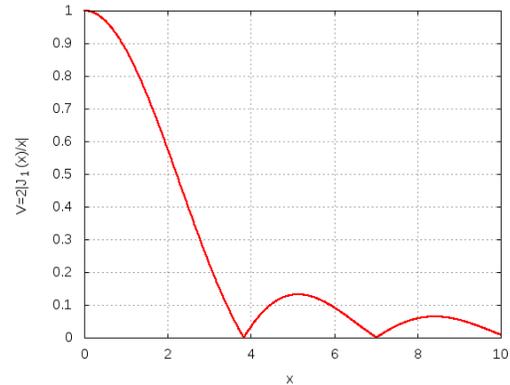


Figure 3 – Fonction de visibilité.

**Exercice 7 – Naine blanche ou brune ?**

Le système binaire Gliese J483 (HIP 62145) est une binaire spectroscopique à un seul spectre observable de type K3V, de période orbitale  $P = 271$  j et dont le demi-grand axe projeté sur la ligne de visée est  $a_1 \sin i = 2.475 \times 10^9$  m. Par ailleurs, les mesures d'Hipparcos permettent d'avoir le demi-grand axe du système  $a_1'' = 8.39$  mas et  $\pi'' = 67.47$  mas. Le compagnon est-il une naine brune ( $m_2 < 0.07 M_\odot$ ) ? On utilisera la relation masse–type spectral donnée dans la table 1.

**Exercice 8 – Sirius, un système d'étoiles doubles**

Sirius A et Sirius B forment un système d'étoiles doubles de période orbitale  $P = 49$  ans et de demi-grand axe :  $a_A'' = 2.5$  arcsec. Par ailleurs, la parallaxe de Sirius est connue :  $\pi'' = 375$  mas.

1 – Calculer la masse  $m_A$  et le rayon  $R_A$  de Sirius A en unités de masse et de rayon solaires, ainsi que sa masse volumique moyenne  $\rho_A$  que vous exprimerez en densité solaire moyenne  $\rho_\odot$ , en  $\text{kg m}^{-3}$  et en  $\text{g cm}^{-3}$ . On utilisera pour cela la relation empirique masse–luminosité et masse–rayon, valables uniquement pour les étoiles de la séquence principale.

2 – Calculer la masse  $m_B$ , le rayon  $R_B$  et la masse volumique moyenne  $\rho_B$  de Sirius B dans les mêmes unités que précédemment. Pour cela on utilisera l'expression (3) démontrée dans l'exercice 2 ainsi que la fonction de la figure 4. De plus on exploitera la relation indice de couleur–température. Enfin, on utilisera la table 1 suivante pour calculer la luminosité de Sirius B.

3 – En déduire la nature de Sirius B. Donner la distance interparticule  $\lambda$  dans Sirius B, en faisant l'hypothèse que le rayon atomique est de l'ordre de  $1 \text{ \AA}$  ( $10^{-10}$  m) et que le rayon du noyau est de l'ordre de  $1 \text{ fm}$  ( $10^{-15}$  m).

Sirius A :

- type spectral et classe de luminosité : A1Vm
- magnitude apparente dans la bande V :  $V_A = -1.46$
- indice de couleur  $B - V = 0$
- correction bolométrique :  $BC_V = -0.35$

Sirius B :

- type spectral et classe de luminosité : DA2
- magnitude apparente dans la bande V :  $V_B = 9.3$
- indice de couleur :  $B - V = -0.12$
- indice de couleur :  $U - B = -1.04$

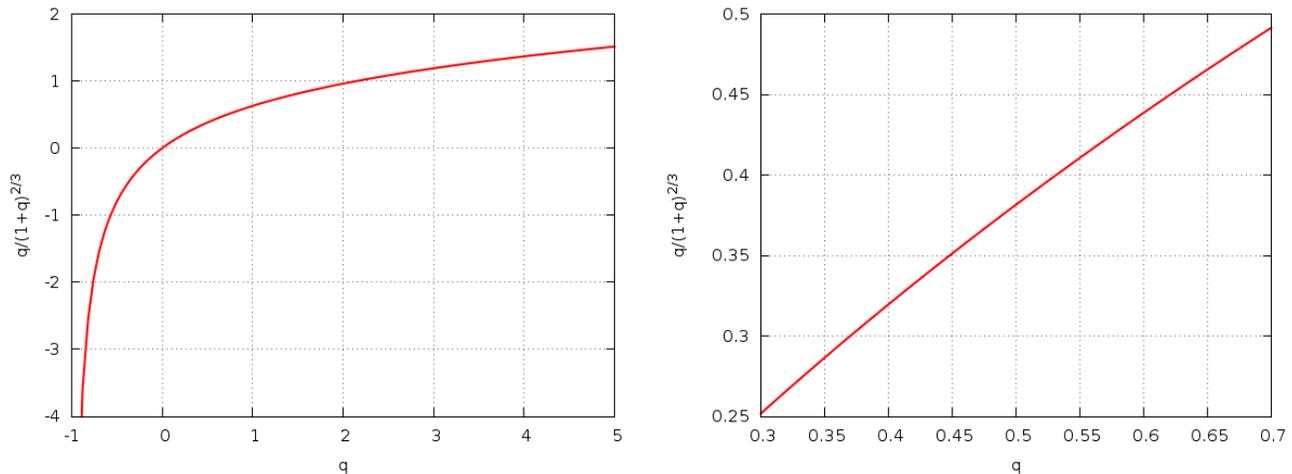


Figure 4 – Fonction utile pour résoudre l'exercice 8.  $q = m_2/m_1$  est le rapport des masses.

#### Données générales :

- Rayon solaire :  $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8$  m
- Masse solaire :  $M_{\odot} = 1.99 \times 10^{30}$  kg
- Luminosité solaire :  $L_{\odot} = 3.85 \times 10^{26}$  W
- Magnitude bolométrique absolue du Soleil :  $\mathcal{M}_{\odot}^{\text{bol}} = 4.75$
- Température effective solaire :  $T_{\text{eff}}^{\odot} = 5780$  K
- Période orbitale de la Terre :  $P_{\odot\oplus} = 3.15 \times 10^7$  s
- Unité astronomique :  $1 \text{ au} = 1.50 \times 10^{11}$  m
- Parsec :  $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ al} = 206265 \text{ au}$
- Constante de gravitation :  $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- Nombre d'Avogadro :  $\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

#### Relation empirique masse–luminosité pour les étoiles de la séquence principale :

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \begin{cases} 1.2 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{3.8} & \text{si } M > 1.1 M_{\odot} \\ 0.67 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{2.8} & \text{si } M < 1.1 M_{\odot} \end{cases} \quad (8)$$

#### Relation empirique masse–rayon pour les étoiles de la séquence principale :

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \begin{cases} 1.03 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{0.64} & \text{si } M > 1.1 M_{\odot} \\ 0.95 \left[ \frac{M}{M_{\odot}} \right]^{0.92} & \text{si } M < 1.1 M_{\odot} \end{cases} \quad (9)$$

#### Relation empirique indice de couleur–température dans le régime de Rayleigh-Jeans :

$$B - V = \frac{7090}{T_{\text{eff}}} - 0.55 \quad \text{si } B - V > -0.86 \quad (10)$$

Type spectral	$T_{\text{eff}}$			$BC_V$	$M/M_{\odot}$		
	V	III	I		V	III	I
O5	50000			-4.30	40		100
B0	27000			-3.17	17		50
B5	16000			-1.39	7		25
A0	10400			-0.40	3.6		16
A5	8200			-0.15	2.2		13
F0	7200			-0.08	1.8		13
F5	6700	6500	6200	-0.04	1.4		10
G0	6000	5500	5050	-0.06	1.1	2.5	10
G5	5500	4800	4500	-0.10	0.9	3	13
K0	5100	4400	4100	-0.19	0.8	4	13
K5	4300	3700	3500	-0.71	0.7	5	16
M0	3700	3500	3300	-1.20	0.5	6	16
M5	3000	2700		-2.10	0.2		

Table 1 – Extraits du *Allen's Astrophysical quantities*

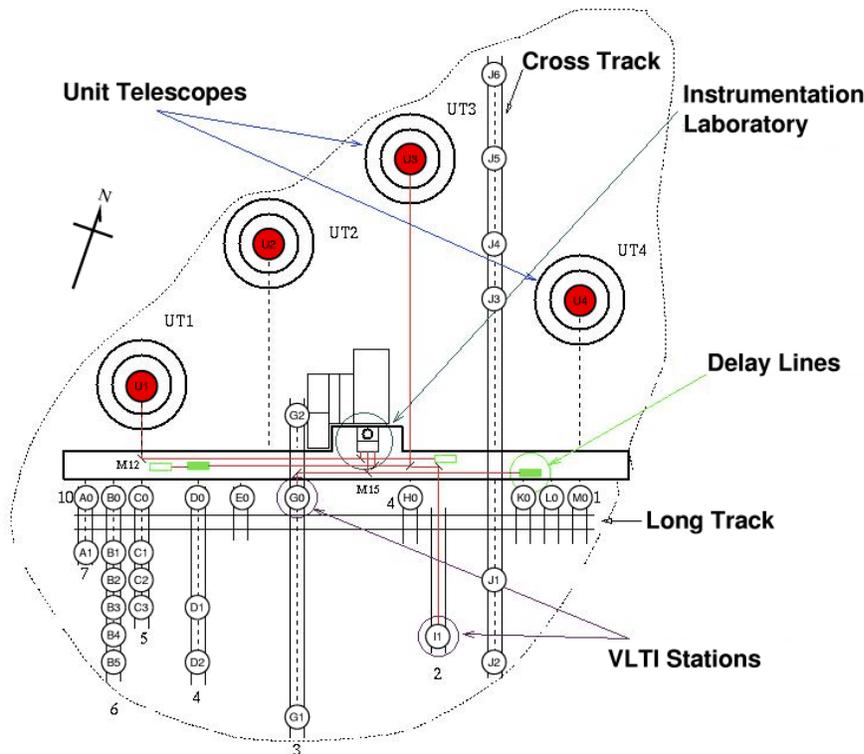


Figure 5 – Very Large Telescope Interferometer

Stations	B [m]	Angle [°]
B0-C0	7.989	70.973
B2-C3	11.305	116.052
A1-C1	15.999	70.980
B3-C1	17.900	7.524
B2-C0	25.293	-0.571
B1-D1	28.847	104.712
H0-K0	31.987	71.014
J4-U3	33.937	-64.026
B0-D1	39.997	124.142
E0-U1	45.274	-63.980
A0-B5	48.663	151.542
C2-G0	53.683	44.458
J3-L0	58.236	145.064
D0-H0	64.005	71.012
A0-G2	68.352	50.451
E0-U2	72.458	-12.654
D0-U2	75.903	-0.559
D0-I1	82.350	100.065
C3-I1	88.365	76.202
E0-J3	91.225	33.137
B2-I1	97.314	80.471
G1-M0	102.451	32.349
C2-J2	106.748	84.001
D0-M0	112.003	71.010
C2-K0	114.549	58.915
J6-K0	120.261	157.208
C2-L0	122.403	59.699
B1-L0	129.010	63.886
G0-J6	132.430	6.031
B5-L0	136.720	50.456
D1-U4	142.437	32.852
B0-J5	147.522	30.415
D1-J5	155.337	15.526
A1-J5	164.164	27.993
B2-J6	182.433	18.893

Table 2 – Quelques lignes de bases du VLTI.