PHYS-F-438 – Session d'exercices 3 & 4

Exercice 1 – Le poids moléculaire moyen

Le poids moléculaire moyen μ, ou la masse moyenne par particule, est une quantité qui permet de relier la densité de particules totale n d'un système ou de ses constituants n_k à sa masse volumique totale ρ. Le poids moléculaire moyen est exprimé en unité de masse atomique m_u. Donc par définition :

$$\rho = \mu m_\mathrm{u}\, n. \tag{1}$$

Dans les étoiles, les températures et les pressions mises en jeu permettent de considérer que le gaz est complètement ionisé. Dans ce cas, le gaz est un plasma formé uniquement d'ions positifs et d'électrons de densités en nombre n_i et n_e respectivement.

1. Exprimer le poids moléculaire moyen en fonction des masses atomiques A_k, des densités en nombre n_k des ions k ainsi que de la densité électronique n_e.

2. Introduire le poids moléculaire moyen ionique μ_i et électronique μ_e. Exprimer le poids moléculaire moyen ionique et électronique en fonction des fractions de masse $X_k = \rho_k/\rho$, des masses atomiques A_k et des degrés d'ionisation Z_k.

3. Calculer le poids moléculaire moyen ionique μ_i, électronique μ_e et total μ pour un système formé d'un gaz d'hydrogène :

   a) neutre

   b) ionisé à 50 %

   c) complétement ionisé

4. On suppose que dans les étoiles le gaz est complétement ionisé, que pour les métaux[1] : $Z_k = A_k/2$ et $\sum X_k/A_k \approx X_\mathrm{met}/\langle A\rangle$. Montrez que le poids moléculaire moyen stellaire peut s'écrire :

$$\mu = \frac{1}{2X_\mathrm{H} + \frac{3}{4}X_\mathrm{He} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\langle A\rangle}\right) X_\mathrm{met}} \tag{2}$$

   Calculer cette valeur pour le Soleil, étant donné les fractions de masse de l'hydrogène $X_\mathrm{H} = 0.73$, de l'hélium $X_\mathrm{He} = 0.25$ et des métaux $X_\mathrm{met} = 0.02$. On prendra $\langle A\rangle = 20$.

Exercice 2 – Les frontières dans le diagramme température–densité (centrales)

Le diagramme température–densité centrales est divisée en zones gouvernées par différentes équations d'état et différents processus nucléaires. L'état thermodynamique d'un système à l'équilibre est connu lorsque le couple (T, ρ) ou (T, n) ou (T, P) est déterminé. Un plasma à l'équilibre peut être dégénéré/non-dégénéré, relativiste/non-relativiste, idéal/non-idéal, etc. Caractérisons les frontières de ces régions dans le plan $(\log\rho, \log T)$ pour les ions et pour les électrons.

1. Déterminer l'équation de la frontière $\log\rho = f(\log T)$ entre un plasma idéal $(\Gamma < 1)$ et non idéal $(\Gamma > 1)$. On rappelle que le paramètre de couplage électrostatique Γ est :

$$\Gamma = \frac{\text{énergie électrostatique}}{\text{énergie cinétique}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z^2e^2}{\left[\frac{3}{4\pi n}\right]^{1/3}} \times \begin{cases} 1/kT & \text{si non-dégénéré} \\ 2m/p_\mathrm{F}^2 & \text{si dégénéré} \end{cases} \tag{3}$$

2. Déterminer l'équation de la frontière $\log\rho = f(\log T)$ entre un plasma dégénéré $(\tau \ll 1)$ et non-dégénéré $(\tau \gg 1)$. On rappelle que le paramètre de dégénérescence τ qui caractérise un plasma est :

$$\tau = \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_t}\right]^2 \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \left[\frac{3}{4\pi n}\right]^{2/3} \quad \text{et} \quad \lambda_t = \begin{cases} h/2\pi\sqrt{mkT} & \text{si non-relativiste} \\ hc/2\pi kT & \text{si relativiste} \end{cases} \tag{4}$$

   où λ_n est la distance moyenne entre particules et λ_t et la longueur d'onde de de Broglie.

[1] Eléments plus lourd que l'hélium.

3. Déterminer l'équation de la frontière $\log \rho = f(\log T)$ entre plasma relativiste ($B \sim 1$) et non-relativiste ($B \ll 1$). On rappelle que le paramètre de relativité B qui caractérise un plasma est :

$$B = \frac{\text{Energie cinétique non-relativiste}}{\text{Energie au repos}} = \frac{1}{m_0 c^2} \times \begin{cases} kT & \text{si non-dégénéré} \\ p_\mathrm{F}^2/2m & \text{si dégénéré} \end{cases} \tag{5}$$

   On rappelle que l'impulsion de Fermi est donné par (voir Exercice 4) : $p_\mathrm{F} = \left[\frac{3h^3}{8\pi} n\right]^{1/3}$

4. Tracer les frontière dans le plan ($\log \rho$, $\log T$) pour les électrons et pour les ions, puis placer les étoiles suivantes pour lesquelles on fournit la température T_c et la densité ρ_c centrales dans ce plan et conclure :
   a) le Soleil : $T_c = 15.6$ MK, $\rho_c = 1.56 \ \times 10^5$ kg m^{-3}
   b) Arcturus (α Boo, géante rouge) : $T_c \sim 50$ MK, $\rho_c \sim 10^6$ kg m^{-3}
   c) Sirius B (α CMa B, naine blanche) : $T_c \sim 35$ MK, $\rho_c \sim 2 \times 10^9$ kg m^{-3}
   d) Pulsar du crabe (étoile à neutrons) : $T_c \sim 1$ MK, $\rho_c \sim 2 \times 10^{18}$ kg m^{-3}

Exercice 3 – Gaz de bosons

Pour un système formé uniquement de bosons pouvant échanger énergie et matière avec l'extérieur, on cherche à déterminer le nombre moyen de particules $\bar{N}$ en fonction de la température T et du potentiel chimique μ des bosons, ainsi qu'en fonction de l'énergie de chaque état ϵ_λ de chaque particule.

1. Déterminer la fonction de partition grand canonique Ξ de ce système. On rappelle que :

$$\Xi \equiv \sum_l \mathrm{e}^{-\beta(E_l - \mu N_l)} = \prod_\lambda \xi_\lambda = \prod_\lambda \sum_{N_\lambda} \mathrm{e}^{-\beta N_\lambda(\epsilon_\lambda - \mu)} \qquad \text{avec } \beta = 1/kT \tag{6}$$

   où ξ_λ est la fonction de partition grand canonique pour l'état individuel λ, N_λ est le nombre de particules dans l'état λ ayant l'énergie ϵ_λ et k la constante de Boltzmann.

2. Determiner le grand potentiel $J = kT \ln \Xi$
3. En déduire le nombre moyen de particules de ce système $\bar{N}$, sachant que : $\bar{N} = [\partial J/\partial \mu]_{T,V}$.
4. Déterminer le nombre de photons dans l'état λ à l'équilibre thermique.

Exercice 4 – Gaz d'électrons non-relativiste extrêmement dégénéré

Un système fermé non-isolé est constitué d'un gaz parfait d'électrons non-relativistes mais extrêmement dégénéré. On souhaite déterminer l'équation d'état de ce système. En particulier, on cherche à exprimer la pression électronique P_e en fonction de la densité électronique n_e.

1. En utilisant la statistique de Fermi-Dirac dans le cas extrêmement dégénéré (voir la figure 3), calculer la densité électronique de ce gaz en fonction d'une impulsion caractéristique (impulsion de Fermi p_F).
2. Pour un système canonique, la pression statistique est donnée par $P = -[\partial F/\partial V]_{T,N}$, où $F = -kT \ln Z$ est l'énergie libre du système et Z sa fonction de partition canonique. Déterminer la pression électronique P_e en fonction de l'impulsion de Fermi p_F.
3. Exprimer P_e en fonction de n_e. Conclure.

Données générales :

- Unité de masse atomique : $m_\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}$ kg
- Masse du proton : $m_\mathrm{p} = 1.67 \times 10^{-27}$ kg
- Masse de l'électron : $m_\mathrm{e} = 9.11 \times 10^{-31}$ kg
- Constante de Planck : $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J s
- Constante de Boltzmann : $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
- Constante de Stefan : $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}
- Célérité de la lumière : $c = 3.00 \times 10^8$ m s^{-1}
- Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F m^{-1}

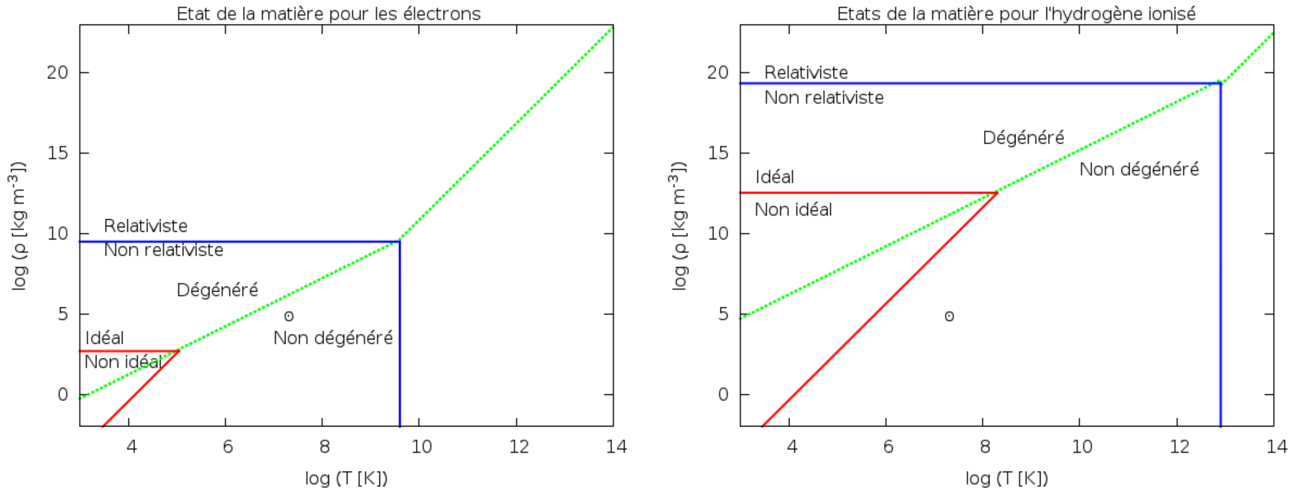

Figure 1 – Diagrammes d'état température–densité. **À gauche :** pour les électrons avec $\mu_e = 1.17$. **À droite :** pour de l'hydrogène complètement ionisé ($A_H = 1$, $X_H = 0.73$, $Z_H = 1$).

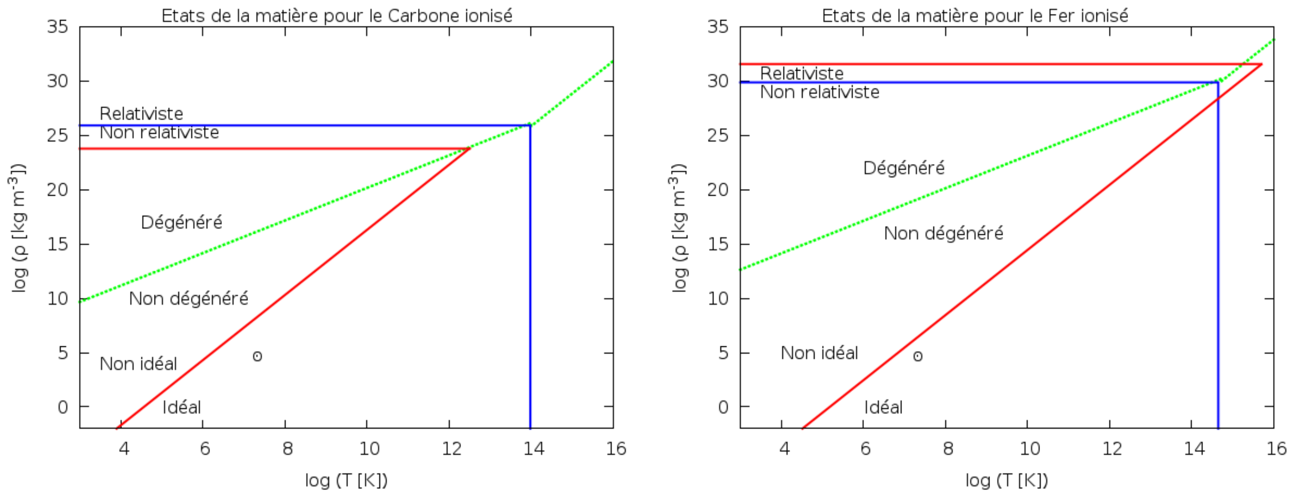

Figure 2 – Diagrammes d'état température–densité. **À gauche :** pour le carbone complètement ionisé avec ($A_C = 12.0$, $X_C = 0.004$, $Z_C = 6$). **À droite :** pour le fer complètement ionisé ($A_{Fe} = 55.8$, $X_{Fe} = 0.0002$, $Z_{Fe} = 26$).

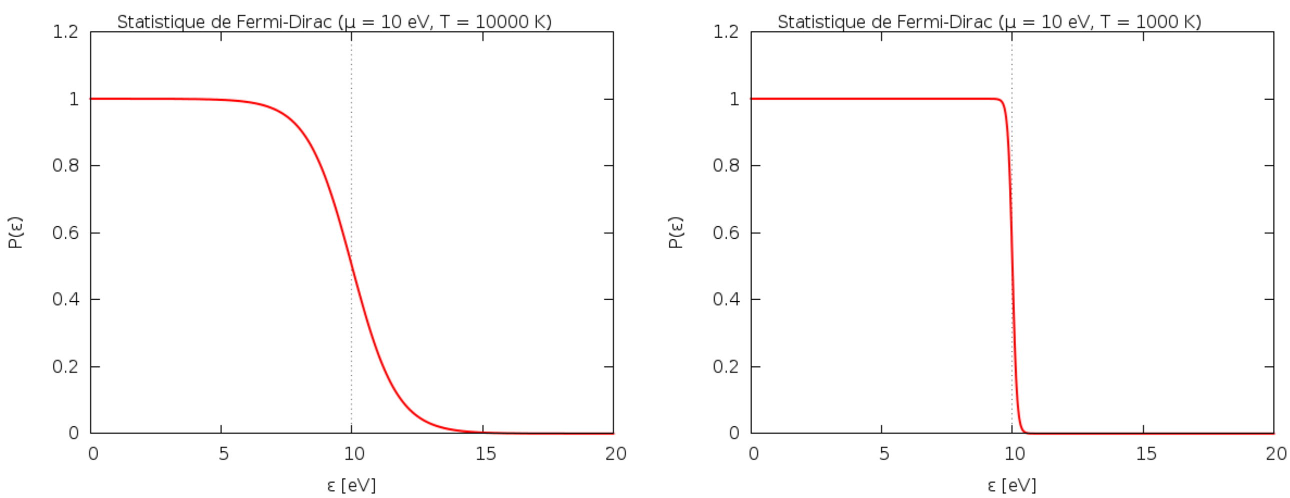

Figure 3 – Statistique de Fermi-Dirac : probabilité d'occupation en fonction de l'énergie de l'état.