PHYS-F-438 – Session d'exercices 5 & 6

Exercice 1 – Ordres de grandeurs dans les étoiles

Déterminer la dépendance des quantités moyennes suivantes au rayon $R_\star$ et à la masse $M_\star$ d'une étoile en ordre de grandeurs :

1. densité moyenne $\bar{\rho}$
2. pression moyenne $\bar{P}$
3. température moyenne $\bar{T}$ dans le cas où :
   a) la pression du gaz domine ($\bar{P} \propto \bar{\rho}\bar{T}$)
   b) la pression du rayonnement domine ($\bar{P} \propto \bar{T}^4$)

À partir de ces ordres de grandeurs :

1. Une étoile bleue est-elle plus ou moins massive qu'une étoile rouge (sur la séquence principale) ?
2. Expliquer pourquoi sur la séquence principale, une étoile est un système mécanique et thermique auto-régulé ?

Exercice 2 – Pression, température et densité au cœur des étoiles de séquence principale

Pour une étoile de masse $M_\star$ et de rayon $R_\star$:

1. Calculer la pression centrale P_c à partir de l'équilibre hydrostatique.

   Applications numériques :
   a) pour le Soleil (naine jaune de la séquence principale) : $M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg, $R_\odot = 6.96 \times 10^{8}$ m
   b) pour Arcturus (α Boo géante rouge da la branche des géantes) : $M_{\alpha\mathrm{Boo}} = 1.1\ M_\odot$, $R_{\alpha\mathrm{Boo}} = 26\ R_\odot$
2. Exprimer la densité centrale ρ_c en fonction de la densité moyenne $\bar{\rho}$ pour un profil de densité (voir figure 1) :

$$\rho(r) = \rho_\mathrm{c} \left(1 - \left[\frac{r}{R_\star} \right]^2 \right). \tag{1}$$

3. Donner les relations entre température centrale T_c et $M_\star$ dans le cas où :
   a) la pression du gaz domine
   b) la pression du rayonnement domine ($a = 4\sigma/c$)

   On utilisera la relation empirique masse–rayon pour les étoiles de séquence principale.
4. En réalité, les pressions du gaz P_g et du rayonnement P_r contribuent à l'équilibre hydrostatique de l'étoile.
   a) Exprimer la pression totale $P_\mathrm{t} = P_\mathrm{g} + P_\mathrm{r}$ en fonction de ρ et du paramètre $\beta = P_\mathrm{g}/P_\mathrm{t}$.
   b) Connaissant la pression centrale $P_\mathrm{c} = GM_\star\bar{\rho}/R_\star$, exprimer la masse en fonction de β.
   c) Discuter de la relation entre $M_\star$ et β.
5. Déterminer la valeur du coefficient adiabatique $\Gamma_1 \equiv [\partial \log P / \partial \log \rho]_\mathrm{ad}$ lorsque la pression radiative domine. On utilisera l'entropie radiative telle que $S_\mathrm{rad} = (4/3)aT^3V$. Conclure.

Exercice 3 – Opacité dans les naines blanches

Au centre des naines blanches composées de carbone pur, des calculs détaillés indiquent que l'opacité conductive s'exprime par :

$$\kappa_\mathrm{cond} = 5 \times 10^{-6} \frac{T}{\rho} \ \ \mathrm{m^2\ kg^{-1}} \tag{2}$$

En supposant que l'opacité radiative est donnée par la diffusion Thompson, montrer que dans les cœurs de naines blanches telles que $T = 10^7$ K et $\rho = 10^9$ kg, la conduction domine totalement le transfert d'énergie. On rappelle que le numéro atomique du carbone est $Z(C) = 6$ et que sa masse atomique est $A(C) = 12.0\ m_\mathrm{u}$.

Exercice 4 – Démonstration en première approximation de la relation masse – luminosité

Montrer à partir de l'analyse dimensionnelle de l'équation de l'équilibre radiatif dans les intérieurs stellaires dominés par la pression des gaz (supposés parfaits) que l'on retrouve la relation masse – luminosité ($L \sim M^y$ avec $y \sim 3$).

Exercice 5 – Energie potentielle gravitationnelle d'une étoile

1. Quelle est l'énergie potentielle gravitationnelle libérée par une masse $m(r)$ sur un masse élémentaire $\mathrm{d}m$?
2. Montrer que l'énergie potentielle gravitationnelle d'une étoile de masse $M_\star$ et de rayon $R_\star$ est, pour une étoile homogène :
$$E_{\mathrm{pg}} = -\frac{3}{5}\frac{GM_\star^2}{R_\star} \tag{3}$$
3. Pour une étoile caractérisée par une équation d'état polytropique ($P = K\rho^{1+1/n}$), on montre que l'énergie potentielle gravitationnelle s'écrit sous la forme :
$$E_{\mathrm{pg}} = -\frac{3}{5-n}\frac{GM_\star^2}{R_\star} \tag{4}$$
Estimer la quantité d'énergie rayonnée par une étoile de 1 $M_\odot$ avant qu'elle n'atteigne la séquence principale. On supposera que l'étoile est un polytrope $n = 3$ et qu'elle possède un rayon solaire sur la séquence principale.
4. En déduire sa durée de vie pré-séquence principale.

Exercice 6 – Relation limite masse – luminosité d'Eddington

On trouve une autre relation masse – luminosité (dite d'Eddington) lorsque c'est la pression de rayonnement qui domine la pression totale. Montrer que la luminosité critique d'Eddington pour une étoile d'hydrogène complétement ionisé s'écrit :
$$L_{\mathrm{Ed}} = \frac{4\pi G m_{\mathrm{p}} c}{\sigma_{\mathrm{T}}}\, M \iff L_{\mathrm{Ed}}/L_\odot = 3.26\times 10^4\ M/M_\odot. \tag{5}$$

Exercice 7 – Profondeur optique et géométrique

On suppose que l'opacité d'une étoile est dominée par la diffusion Thomson.

1. Estimer la profondeur géométrique maximale à laquelle un observateur peut sonder. On supposera une densité électronique en nombre constante dans cette région de $n_{\mathrm{e}} = 10^{22}\ \mathrm{m}^{-3}$.
2. Quelle pourcentage du rayon solaire cela représente-t-il ?

Données générales :

- Rayon solaire : $R_\odot = 6.96\times 10^8$ m
- Masse solaire : $M_\odot = 1.99\times 10^{30}$ kg
- Luminosité solaire : $L_\odot = 3.85\times 10^{26}$ W
- Masse moyenne par particule solaire : $\mu_\odot = 0.60$
- Constante de gravitation : $G = 6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$
- Constante de Stefan : $\sigma = 5.67\times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m}^{-2}\ \mathrm{K}^{-4}$
- Section efficace de l'électron : $\sigma_{\mathrm{T}} = 6.65\times 10^{-29}\ \mathrm{m}^2$
- Unité de masse atomique : $m_{\mathrm{u}} = 1.66\times 10^{-27}$ kg
- Masse du proton : $m_{\mathrm{p}} = 1.67\times 10^{-27}$ kg

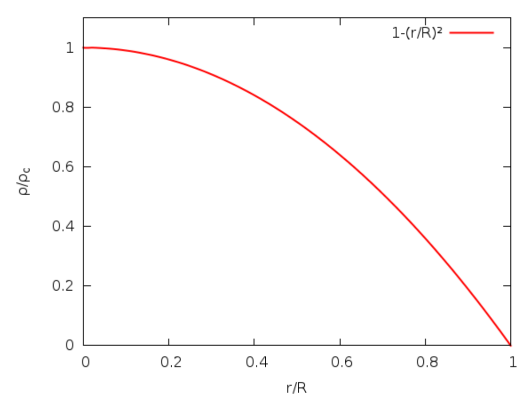

Figure 1 – Profil de densité.

Relation empirique masse–rayon pour les étoiles de la séquence principale :

$$\frac{R}{R_\odot} = \begin{cases} 1.03\left[\frac{M}{M_\odot}\right]^{0.64} & \text{si } M > 1.1\ M_\odot \\ 0.95\left[\frac{M}{M_\odot}\right]^{0.92} & \text{si } M < 1.1\ M_\odot \end{cases} \tag{6}$$