

Introduction à l'astrophysique

Travaux Dirigés

PHYS-F-304 – ULB

A. Jorissen, R. Deschamps, T. Merle

2015

Exercice 1 — Équations fondamentales de la cosmologie

L'expansion de l'Univers est observé comme le mouvement de galaxies s'éloignant les unes des autres. L'Univers est comme un gaz qui se dilate, mais un gaz dont les constituants élémentaires sont des galaxies, une galaxie individuelle ne se dilatant pas.

1. Les vitesses des galaxies s'éloignant de nous sont proportionnelles à leur éloignement. Exprimer la loi de Hubble pour une galaxie à la distance R , pour un Univers homogène et isotrope.
2. Soit m la masse de cette galaxie et M la masse de l'Univers à l'intérieur de la sphère de rayon R .
 - a) Exprimer l'énergie mécanique E de cette galaxie.
 - b) En utilisant la loi de Hubble et en posant $k = -\frac{2E}{m}$, montrer que la première équation de la cosmologie (équation de Friedmann-Lemaître) qui gouverne l'évolution de l'Univers, s'écrit :

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R(t)} \quad \left[+\frac{\Lambda}{3} \right]. \quad (1)$$

3. En stipulant que la variation d'énergie mécanique de l'Univers de volume V est égal au travail des forces de pressions, montrer que l'équation fluide s'écrit :

$$\dot{\rho} + 3 \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) \frac{\dot{R}}{R} = 0. \quad (2)$$

4. En dérivant l'équation (1) par rapport au temps et en utilisant l'équation fluide (2), montrer que l'équation de Friedmann-Lemaître qui gouverne l'accélération de l'Univers s'écrit :

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad \left[+\frac{\Lambda}{3} \right]. \quad (3)$$

5. Avec les résultats précédents répondez aux questions suivantes :
 - a) L'accélération de l'expansion de l'Univers dépend-elle de sa géométrie ?
 - b) Comment se comporte l'accélération de l'Univers si la constante cosmologique est nulle ?

Dans tout l'exercice, on ne tiendra pas compte du terme avec constante cosmologique.

Exercice 2 — Échelle, accélération et âge de l'Univers

On s'intéresse aux modèles d'Univers euclidiens (sans courbure $k = 0$). Par convention, on fixera le temps d'aujourd'hui à $t = t_0 = 0$ et le facteur d'échelle actuel à $R(t_0) = R_0 = 1$.

1. À partir de l'équation de Friedman-Lemaître (1) :
 - a) Déterminer la densité critique actuelle de l'Univers ρ_0^{crit} en fonction de la constante de Hubble H_0 (on prendra $\Lambda = 0$).
 - b) Calculer sa valeur numérique en kg m^{-3} , puis en $M_\odot \text{ Mpc}^{-3}$.
 - c) Connaissant la masse du proton, exprimer la densité critique en nombre de proton par m^3 .
 - d) Sachant que la masse moyenne d'une galaxie est de l'ordre de $10^{11} M_\odot$, exprimer la densité critique en nombre moyen de galaxies par Mpc^3 .

On s'intéresse à trois contenus différents gouvernés par les équations d'états :

- Univers dominé par la matière ($P = 0$ et $\Lambda = 0$) ;
 - Univers dominé par le rayonnement ($P = \rho c^2/3$ et $\Lambda = 0$) ;
 - Univers à constante cosmologique ($P = -\rho c^2$ et $\Lambda \neq 0$).
2. Pour chaque cas, déterminer :
 - a) La loi de dilution de la densité totale ρ en fonction de de la densité critique ρ_0^{crit} et du facteur d'échelle $R(t)$ en partant de l'équation fluide (2) ;
 - b) Le facteur d'échelle de l'Univers $R(t)$ en fonction du temps t et de la constante de Hubble H_0 (et en fonction de $\lambda = \Lambda/3H_0^2$ pour l'Univers à constante cosmologique) ;
 - c) L'accélération de l'Univers $\ddot{R}(t)$;
 - d) L'âge de l'Univers ;
 3. Pour l'Univers à constante cosmologique, quelles sont les valeurs possible de λ ? Que vaut le facteur d'échelle et son accélération pour $\lambda = -1$?
 4. Quel modèle permet d'expliquer l'expansion accélérée de l'Univers ?

Données :

- $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
- $M_\odot = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
- $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
- $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ al}$

Exercice 3 — Distances en fonction du redshift

Un photon (e) émis par une galaxie lointaine, très lointaine, nous arrive aujourd'hui (0).

1. À partir de la loi de Hubble, calculer la distance d_D qui nous sépare de cette galaxie en utilisant :
 - le redshift Doppler classique :

$$z = \frac{v}{c}$$

- le redshift Doppler relativiste :

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

où v est la vitesse relative d'éloignement de cette galaxie.

2. À partir des équations de Friedman-Lemaître sans constante cosmologique, montrer que :

$$\dot{R} = H_0 \sqrt{1 + \Omega_0 \left(\frac{1}{R} - 1 \right)}, \quad (4)$$

où Ω_0 est le paramètre de densité totale de l'Univers tel que $\Omega_0 = \rho_0/\rho_0^{\text{crit}}$. On supposera l'Univers dominé par la matière ($P = 0$).

3. À partir de la métrique de Robertson-Walker dans un Univers plat (indice de courbure $k = 0$), calculer la distance d_C qui nous sépare de cet événement en utilisant le redshift cosmologique :

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}. \quad (5)$$

On prendra $R_0 = R(t_0) = 1$.

4. Calculer les distances d_D et d_C pour $z = 0.1, 0.5, 1$ et 2 . Que constatez-vous ? Quel est la distance cosmologique maximale ($z \rightarrow \infty$) ?

Données : $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

Exercice 4 — Dimension de l'Univers observable

On prendra l'origine du temps cosmique tel que :

À $t = 0, R(0) = 0$

À $t = t_0, R(t_0) = 1$.

- Donner la distance propre de l'horizon cosmique d_h en fonction du facteur d'échelle, puis en fonction du décalage spectral z et de la coordonnée comobile ξ (qui dépend de la géométrie).
- Pour un modèle d'Univers euclidien, sans constante cosmologique, dominé par la matière ($\Omega_0 = 1$ et $\rho = \rho_0^{\text{crit}}/R^3$), montrer que la distance propre de l'horizon cosmique est :
 - en fonction du temps cosmique : $d_h(t) = 3ct$
 - en fonction du redshift cosmologique : $d_h(z) = \frac{2c}{H_0} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$
- Applications numériques : calculer la distance propre de l'horizon cosmique d_h
 - pour $t_U = 13,8 \text{ Ga}$
 - pour $z = 0$
- Pour un modèle d'Univers non-euclidien dominé par la matière ($\Omega_0 \neq 1$ et $\rho = \rho_0^{\text{crit}}/R^3$) et sans constante cosmologique, montrer que la distance propre de l'horizon cosmique est :

$$d_h(z) = \frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_0-1}} \arccos\left(1 - \frac{2(\Omega_0-1)}{\Omega_0(1+z)}\right) \quad (8)$$

On utilisera la primitive suivante (cas où $\Omega_0 > 1$) :

$$\int \frac{1}{\sqrt{bx - ax^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arccos\left(1 - \frac{2ax}{b}\right) + \text{cste}. \quad (9)$$

Exercice 5 — Âge de l'Univers

L'équation de Friedman-Lemaître sans constante cosmologique s'écrit :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2} \quad (10)$$

- Déterminer l'âge de l'Univers à courbure nulle.
- Vérifier que les expressions ci-dessous sont solutions de l'équation (10), dans le cas d'un Univers dominé par la matière :
 - si $k = 1, \Omega_0 > 1$,

$$\begin{cases} R &= \frac{4\pi G \rho_0}{3k} (1 - \cos x) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos x) \\ t &= \frac{4\pi G \rho_0}{3k^{\frac{3}{2}}} (x - \sin x) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}} (x - \sin x) \end{cases} \quad (11)$$

— si $k = -1$, $\Omega_0 < 1$,

$$\begin{cases} R &= \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho_0}{|k|} (\cosh x - 1) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{1 - \Omega_0} (\cosh x - 1) \\ t &= \frac{4\pi}{3} \frac{G\rho_0}{|k|^{3/2}} (\sinh x - x) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh x - x) \end{cases} \quad (12)$$

3. En utilisant les solutions précédentes, montrer que l'âge de l'Univers vaut :

$$t = \frac{f(\Omega_0)}{H_0} \quad \text{où} \quad f(\Omega_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \arccos\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right) - \frac{1}{\Omega_0 - 1} & \text{si } \Omega_0 > 1 \\ \frac{1}{1 - \Omega_0} - \frac{1}{2} \frac{\Omega_0}{(1 - \Omega_0)^{3/2}} \operatorname{argcosh}\left(\frac{2}{\Omega_0} - 1\right) & \text{si } \Omega_0 < 1 \end{cases} \quad (13)$$

Exercice 6 — Facteur d'échelle à différentes époques

On se place dans le cadre du modèle cosmologique standard Λ CDM (Univers plat en expansion accélérée) où le paramètre de densité totale est $\Omega_0 = \rho_0/\rho_0^{\text{crit}} = 1$, le paramètre de densité de matière $\Omega_0^{\text{m}} = 0,3$, le paramètre de densité lié à la constante cosmologique $\Omega_0^{\Lambda} = 0,7$, le paramètre de densité de rayonnement $\Omega_0^{\text{r}} \sim 0$.

1. Epoque de la recombinaison électrons libres – noyaux
 - a) A partir de la définition du redshift classique et du redshift cosmologique, montrer que $\lambda_0 = \frac{R_0}{R(t)} \lambda(t)$;
 - b) En déduire la relation entre la température de l'Univers mesuré à un instant quelconque $T(t)$ et la température du fond diffus cosmologique mesuré aujourd'hui T_0 . On s'appuyera sur le fait que la densité d'énergie radiative totale de l'Univers est donnée par $u = aT^4$ (Loi de Stefan) ;
 - c) Calculer le facteur d'échelle à l'époque de la recombinaison ainsi que son redshift correspondant sachant que $T_{\text{r}} = 3000$ K.
2. Transition ère de rayonnement – ère de matière
 - a) Calculer la densité de rayonnement aujourd'hui ρ_0^{r} et comparer à la densité de matière actuelle ρ_0^{m} ; est-elle négligeable ?
 - b) Déterminer la relation entre la densité de rayonnement et la densité de matière aujourd'hui ρ_0^{r} et ρ_0^{m} en fonction du facteur d'échelle à cette transition $R(t_i)$;
 - c) En déduire l'expression du facteur d'échelle et son redshift correspondant à la transition ère de rayonnement – ère de matière en fonction de T_0 et ρ_0^{crit} .
3. La recombinaison et la transition ère de matière – ère de rayonnement se produisent-elles au même moment ?

Données :

- $T_0 = 2,73$ K
- $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
- $\rho_0^{\text{crit}} = 9,7 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$
- $a = \frac{4\sigma}{c} = 7,56 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$

Exercice 7 — La distance diamètre-angulaire

La distance d'un objet peut-être trouvé en comparant son diamètre linéaire (D) à son diamètre angulaire (θ supposé petit) :

$$d_A = \frac{D}{\theta}, \quad (15)$$

c'est la distance diamètre-angulaire.

1. Dans la métrique de Robertson-Walker, pour un modèle d'Univers plat dominé par la matière, montrer que :

$$D = \frac{\varpi \theta}{1+z} \quad (16)$$

où ϖ est la coordonnée comobile.

2. Montrer que le diamètre angulaire d'un objet d'extension D est donné par :

$$\theta = \frac{H_0 D}{2c} \frac{(1+z)^{3/2}}{\sqrt{1+z}-1} \quad (17)$$

3. Pour quelles valeurs du décalage spectral l'angle θ sous lequel on observe un corps céleste est-il minimum ?
4. Quelle est la plus petite valeur de θ quand on observe un amas de galaxies dont le diamètre est de 1 Mpc ?

Exercice 8 — Populations d'états d'excitation moléculaires

Le spectre de certaines étoiles présentent des raies d'absorption dues aux molécules interstellaires. On s'intéresse au radical cyanogène CN qui produit un doublet de résonance à 3874,0 et 3874,6 Å.

1. La raie à 3874,6 Å se produit entre l'état fondamental de densité de population (en nombre) n_1 et le premier état excité de densité n_3 . Calculer le rapport de populations n_3/n_1 à $T = 2,73$ K.
2. En réalité la rotation de la molécule scinde chaque niveau. La transition entre les deux niveaux fins de l'état fondamental se situe à 2,64 mm. Calculer le rapport de populations n_2/n_1 à la même température.
3. Comment peut-on déterminer la température du fond diffus cosmologique à partir de la mesure du doublet (cf. Sect. 4.2.3 du cours) ?

Données :

- $g_1 = g_3 = 1$
- $g_2 = 3$
- $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
- $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
- $k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
- $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Exercice 9 — Corps noirs

1. Calculer la puissance totale émise par un corps noir de forme sphérique porté à la température T . Quelle est la puissance totale (luminosité $L_\odot$) émise par le Soleil ($T = 5780$ K, $R = 6,96 \times 10^8$ m) ?
2. À quelle longueur d'onde rayonne le plus ce corps noir ?
3. Calculer la température d'équilibre d'un corps noir sphérique recevant un éclairage (un flux) de $F = 1 \text{ kW m}^{-2}$.
4. Calculer l'éclairement reçu du Soleil par la Terre (distance Terre-Soleil $D = 1,50 \times 10^{11}$ m).

Données :

- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Exercice 10 — Parallaxes, magnitudes et distances

1. L'étoile Polaire à une parallaxe $\pi = 7,54$ mas. À quelle distance se trouve-t-elle ?
2. L'étoile la plus proche de notre Soleil est α Cen. Elle est située à seulement $d = 1,35$ pc. Quel est sa parallaxe stellaire ?

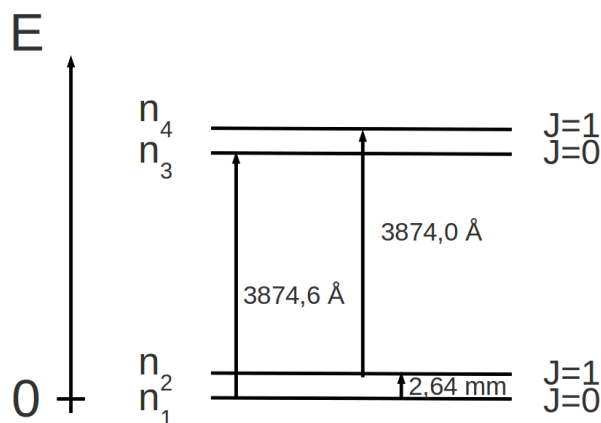


FIGURE 0.1 – Diagramme de Grotrian partiel du radical CN.

3. Si une étoile est à $d = 830$ pc et a une magnitude apparente $m = 8,10$, alors quelle est sa magnitude absolue ?
4. Si une étoile est à $d = 234$ kpc et a une magnitude absolue $M = -4,89$ alors quelle est sa magnitude apparente ?
5. Une étoile a une magnitude apparente $m = 7,8$ et une magnitude absolue de $M = -4,2$. À quelle distance se trouve-t-elle ?

Exercice 11 — Magnitudes du « cheval » et du « cavalier »

Mizar et Alcor forment un système d'étoiles doubles dans la constellation de la Grande Ourse. La capacité de voir Alcor à l'oeil nu est un test traditionnel d'acuité visuelle.

On mesure la magnitude intégrée de (Mizar (1) et Alcor (2)) dans la bande V ($V_{1+2} = 2,1$), ainsi que le rapport de flux (éclaircissements) entre l'étoile primaire (1) et l'étoile secondaire (2) $r = F_1/F_2 = 5$.

Calculer les magnitudes V_1 et V_2 de chacune des composantes.

On note que la magnitude intégrée n'est pas égale à la somme des magnitudes des composantes : $V_{1+2} \neq V_1 + V_2$.

C'est le flux intégré qui est égal à la somme des flux des composantes : $F_{1+2} = F_1 + F_2$.

Exercice 12 — Caractéristiques d'une étoile chaude

On s'intéresse à l'étoile Dschubba (δ Sco) dans la constellation du Scorpion. On donne :

- Température de surface : $T_\star = 28000$ K
- Rayon (en rayon solaire) : $R_\star = 7,41 R_\odot$
- Distance Terre-étoile : $d_{\oplus\star} = 123$ pc

Déterminer :

1. sa luminosité $L_\star$ en luminosité solaire $L_\odot$,
2. sa magnitude bolométrique absolue $M_{\text{bol}}^\star$,
3. sa magnitude bolométrique apparente $m_{\text{bol}}^\star$,
4. son module de distance,
5. son flux de surface $F_\star$,
6. son flux reçu sur Terre $F_{\oplus}^\star$,

7. sa longueur d'onde pic $\lambda_{\max}$.

Données :

- $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
- $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
- $L_{\odot} = 3,85 \times 10^{26} \text{ W}$
- $M_{\text{bol}}^{\odot} = 4,75$
- $\text{pc} = 3,26 \text{ al}$

Exercice 13 — Lumineux ciel...

On souhaite évaluer la magnitude bolométrique absolue d'un ciel uniformément aussi brillant que le Soleil $M_{\text{bol}}^{\text{ciel}}$ (en mag arcsec⁻²).

1. Calculer la magnitude bolométrique apparente du Soleil, ainsi que l'angle solide sous lequel on voit le Soleil depuis Terre.
2. Déterminer la brillance de surface du Soleil ainsi que la magnitude associée.
3. Comparer à la magnitude d'une galaxie elliptique. À quoi est due cette différence ?
4. Calculer la distance inter-étoile moyenne pour le centre d'une galaxie.

Données

- Magnitude apparente du centre galactique : $V = 18 \text{ mag arcsec}^{-2}$
- Magnitude apparente du fond de ciel : $V = 22,5 \text{ mag arcsec}^{-2}$
- Magnitude bolométrique absolue du Soleil : $M_{\odot}^{\text{bol}} = 4,75 \text{ mag}$
- Rayon solaire : $R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
- Distance moyenne Terre-Soleil : $D_{\oplus\odot} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
- Parsec : $1 \text{ pc} = 2,06 \times 10^5 D_{\oplus\odot}$

Exercice 14 — L'amas des Hyades (nécessite pc et connexion internet)

Cet exercice fait appel à des données accessibles via le service d'interrogation de catalogues de données astronomiques VizieR (<http://vizier.u-strasbg.fr/viz-bin/VizieR>) sur le CDS (Centre de données de Strasbourg). On s'intéresse à l'amas des Hyades, dans la constellation du Taureau, qui est un amas ouvert essentiellement constitué d'étoiles jeunes.

1. En utilisant le module des distances, montrer que l'indice de couleur $B - V$ ne dépend pas de la distance d .
2. Quelle est la classe de luminosité dominante des étoiles constituant cet amas ? (Recherche web)
3. Trouver un catalogue sur VizieR qui vous permet d'avoir la couleur V (magnitude apparente visuelle) et l'indice de couleur $B - V$ des étoiles de l'amas (sélectionner une cinquantaine d'étoiles). Tracer le diagramme couleur-magnitude, c'est-à-dire $V = f(B - V)$, grâce à l'outil VOplot ou à un tableur.
4. À l'aide d'un tableur :
 - a) Déterminer les températures des étoiles de l'amas, en utilisant la relation $B - V = -0,55 + 7090/T$.
 - b) En déduire les type spectraux minimum et maximum et, pour une quinzaine d'étoiles leurs magnitudes absolues (utiliser la table d'équivalence <http://www.uni.edu/morgans/astro/course/Notes/section2/spectraltemps.html> par exemple).
 - c) Calculer le module des distances pour chaque étoile.
 - d) En déduire la distance de chaque étoile.
5. Estimer la distance moyenne de l'amas des Hyades d ainsi que son écart-type σ en pc (parsec) puis en al (années-lumière).
6. Tracer le diagramme HR (Hertzsprung-Russell) de l'amas ($\log(L/L_{\odot}) = f(\log T)$). Comparer avec le diagramme couleur-magnitude.

